單元 12：續概率

12.1 加法原則

教師宜用例子及范氏圖的闡釋，引導學生自行發現下列法則：

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$。

學生應能運用以上法則去解決問題，包括多於兩件事件的情況。

並當 A，B 為互斥時，

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$。

12.2 條件概率

在明確界定條件概率的意義前，教師宜先取一些典型例子討論，使學生能較易吸收和認同。

在定義 $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$ 中，A 可看作是一個縮減了的樣本空間，由此可推論出

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$$

<u>例一</u>

一家庭有兩位小孩，已知其一為女孩。求另一位為男孩的概率。

<u>例二</u>

一盒內裝有 3 個白球及 5 個紅球。

(i) 現隨機地由盒內抽出 1 球，抽出後不再放回盒內。若第 1 次抽出的球為白色，試求第 2 次抽出的球為紅球的概率。

(ii) 現隨機地由盒內抽出 1 球，抽出後再放回盒內。若首 2 次抽出的球皆為白色，試求第 3 次抽出的球為白球的概率。

例三

一信用咭公司調查大學生的新戶口情況。若抽取 160 名學生為樣本，查詢他們是否擁有信用咭 X 或信用咭 Y，結果如下：

	信用咭 X	
信用咭 Y	有	沒有
有	50	20
沒有	30	60

設　事件 A = 擁有兩款信用咭的學生，
　　事件 B = 最少擁有一款信用咭的學生，
　　事件 C = 沒有任何信用咭的學生，
　　事件 D = 擁有信用咭 X 的學生，
　　事件 E = 擁有信用咭 Y 的學生。

求事件 A，B，C，D，E，$A\cup B$，$A\cap B$ 分別發生的概率。同時求 $P(A|E)$ 及 $P(A|D)$。

獨立條件

若以下任何一條件滿足時，A 及 B 可被視為獨立事件：

(i) $P(A|B)=P(A)$

(ii) $P(B|A)=P(B)$

(iii) $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

設 A'、B' 分別代表 A、B 的互補事件，而當 A 及 B 是獨立事件，則 A' 及 B、B' 及 A、A' 及 B' 都是互為獨立事件。

例四

擲一公正的硬幣 3 次。

若　事件 A = 正面在第 1 次出現，
　　事件 B = 正面在第 2 次出現，
　　事件 C = 正面在 3 次投擲中皆出現，

求 A 及 B，B 及 C，C 及 A 是否互相獨立。

12.3 貝葉斯定理

貝葉斯定理指出，若 $B_1, B_2, \ldots$ 均為互斥徹底事件時則

$$P(B_r\,|\,A)=\frac{P(A\cap B_r)}{\sum_i P(A\cap B_i)}=\frac{P(A|B_r)P(B_r)}{\sum_i P(A|B_i)P(B_i)}$$

教師在介紹貝葉斯定理之前，應帶領學生運用條件概率的定義和樹形圖得出這定理。學生無須強記這公式。

例一

設這裏有大小相同的盒子 3 個，裏面裝著不同數目的白球及黑球。

	白球	黑球
第 1 個盒	8	3
第 2 個盒	6	5
第 3 個盒	4	7

隨機地選取一盒子，從中隨機地取出 1 球。

(i) 求抽出白球的概率。

(ii) 若抽出的球為白球，求它是從第 1 個盒子抽出來的概率。

例二

一汽水生產公司的市場經理計畫介紹一新品種可樂到市場去。根據以往經驗，該公司所生產的可樂成功推廣的概率為 30%，而失敗的概率為 70%。在新品種可樂推廣到市場前，公司先作市場調查，收集受歡迎或不受歡迎的報告。根據過往經驗，80% 成功推廣的可樂能得到受歡迎的報告，而 40% 失敗推廣的可樂亦會得到受歡迎的報告。市場經理希望找出，若新品種可樂已得到一受歡迎的報告，它成功推廣的概率為何？

例三

一男子決定去北角探訪親友，可以選擇三種交通工具：地鐵、公共巴士、電車。以下是一些資料：

	乘搭該交通工具的概率	遲到的概率
地鐵	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$
公共巴士	$\frac{2}{8}$	$\frac{5}{9}$
電車	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$

(i) 已知他遲到，求他乘搭地鐵的概率。

(ii) 已知他沒有遲到，求他乘搭公共巴士的概率。